Seri bahan kuliah Algeo #30

Perkalian Geometri
(Bagian 2)

Update 2023

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

2023

Balikan (*inverse*) vektor

- Pada aljabar elementer, $c = ab$ (a dan b bilangan riil) maka $a = cb^{-1}$ atau $b^{-1} = \frac{a}{c}$ (syarat $c \neq 0$)

- Pada aljabar geometri, $B = ab$ (a dan b vektor, B multivektor), maka

$$Bb = (ab)b \qquad \text{(kalikan kedua ruas dengan } b\text{)}$$
$$= ab^2$$
$$a = B\frac{b}{b^2} = B\frac{1}{b} = Bb^{-1}$$
$$a = Bb^{-1}$$

yang dalam hal ini

$$\boxed{b^{-1} = \frac{b}{b^2} = \frac{b}{\|b\|^2}} \rightarrow \text{balikan vektor } b$$

Contoh 4: Diberikan vektor *a* dan *b*: $a = 3e_1 + 4e_2$ dan $b = e_1 + e_2$

Hitung $B = ab$ dan balikan vektor *b*.

<u>Jawaban</u>:

(i) $B = ab = (3e_1 + 4e_2)(e_1 + e_2) = 3e_1^2 + 3e_1e_2 + 4e_2e_1 + 4e_2^2$

$= 3 + 3e_{12} - 4e_{12} + 4 = 7 - e_{12}$

(atau pakai rumus: $ab = a \cdot b + a \wedge b = (3)(1) + (4)(1) + \{(3)(1) - (4)(1)\}\, e_1 \wedge e_2$

$= 7 - e_{12}$)

(ii) $b^{-1} = \dfrac{b}{\|b\|^2} = \dfrac{e_1 + e_2}{(\sqrt{1^2+1^2})^2} = \dfrac{e_1 + e_2}{2} = \dfrac{1}{2}(e_1 + e_2)$

Periksa bahwa *a* dapat diperoleh kembali sebagai berikut:

$$a = Bb^{-1} = \frac{1}{2}(7 - e_{12})(e_1 + e_2) = \frac{1}{2}(7e_1 + 7e_2 - e_{12}e_1 - e_{12}e_2)$$

$$= \frac{1}{2}(7e_1 + 7e_2 + e_2 - e_1) = 3e_1 + 4e_2$$

Operasi *meet*

- Operasi *meet* bertujuan untuk mencari perpotongan garis, bidang, volume, dll. lain.
- Notasi: $A \vee B$
- Operasi *meet* didefinisikan sebagai berikut:

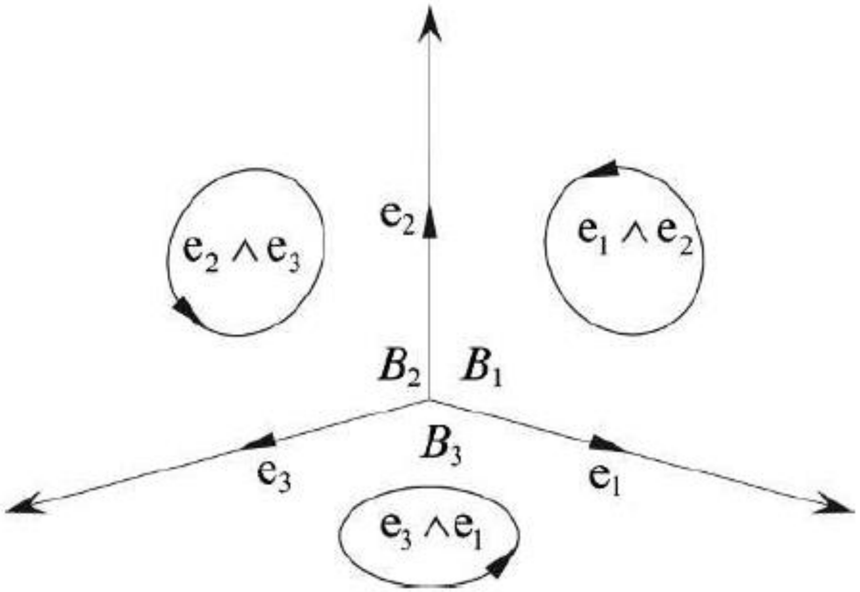
$$A \vee B = A^* \cdot B.$$

yang dalam hal ini, A^* = pseudoscalar dari $A = IA$

Contoh: (i) $A = e_3 \rightarrow A^* = IA = e_{123}e_3 = e_{12}$

(ii) $A = 2e_1 + e_3 \rightarrow A^* = IA = e_{123}(2e_1 + e_3) = 2e_{123}e_1 + e_{123}e_3 = 2e_{23} + e_{12}$

Perhatikan tiga bilah B_1, B_2, dan B_3 yang dibentuk oleh vektor-vektor satuan



$$B_1 = e_1 \wedge e_2$$

$$B_2 = e_2 \wedge e_3$$

$$B_3 = e_3 \wedge e_1$$

Perpotongan bilah B_1 dan B_2 adalah sumbu e_2 $\rightarrow$ $B_1 \vee B_2 = e_2$

Perpotongan bilah B_2 dan B_3 adalah sumbu e_3 $\rightarrow$ $B_2 \vee B_3 = e_3$

Perpotongan bilah B_1 dan B_3 adalah sumbu e_1 $\rightarrow$ $B_3 \vee B_1 = e_1$

- Akan ditunjukkan bahwa $B_1 \vee B_2 = e_2$ dengan operasi *meet*:

$$
\begin{aligned}
B_1 \vee B_2 &= B_1^* \cdot B_2 \\
&= (e_{123}e_{12}) \cdot e_{23} = (e_1e_2e_3e_1e_2) \cdot e_{23} = (-e_1{}^2e_2{}^2e_3) \cdot e_{23} \\
&= -e_3 \cdot e_{23}
\end{aligned}
$$

dengan mengingat bahwa $a \cdot B = \frac{1}{2}(aB - Ba)$ maka $\underbrace{-e_3}_{a} \cdot \underbrace{e_{23}}_{B}$ dapat dinyatakan sebagai

$$-e_3 \cdot e_{23} = \frac{1}{2}(-e_{323} + e_{233})$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
B_1 \vee B_2 = \frac{1}{2}(-e_{323} + e_{233}) &= \frac{1}{2}(e_3e_3e_2 + e_2e_3e_3) \\
&= \frac{1}{2}(e_3{}^2e_2 + e_2e_3{}^2) = \frac{1}{2}(e_2 + e_2) = e_2
\end{aligned}
$$

(terbukti)

- Dengan cara yang sama, maka

$$
\begin{aligned}
B_2 \vee B_3 &= B_2^* \cdot B_3 \\
&= (e_{123}e_{23}) \cdot e_{31} \\
&= -e_1 \cdot e_{31} \\
&= \frac{1}{2}(-e_{131} + e_{311}) \\
B_2 \vee B_3 &= e_3
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
B_3 \vee B_1 &= B_3^* \cdot B_1 \\
&= (e_{123}e_{31}) \cdot e_{12} \\
&= -e_2 \cdot e_{12} \\
&= \frac{1}{2}(-e_{212} + e_{122}) \\
B_3 \vee B_1 &= e_1.
\end{aligned}
$$

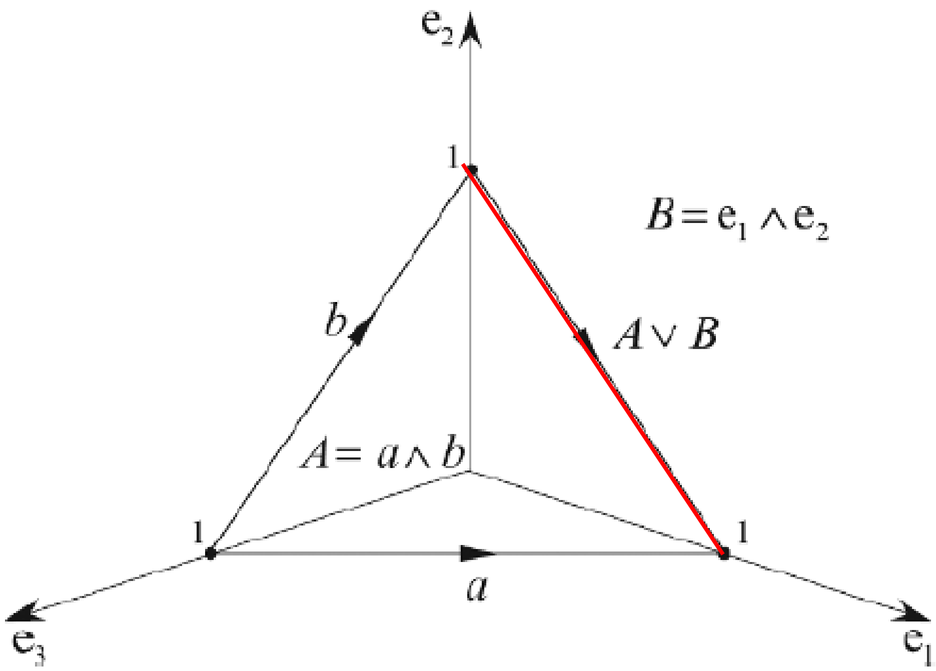
Contoh 5: Diberikan dua buah vektor *a* dan *b* sebagai berikut:

$$a = \mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_3$$

$$b = \mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3$$

Tentukan perpotongan bidang *A* dan *B*, yang dalam hal ini $A = a \wedge b$ dan $B = \mathrm{e}_{12}$

Jawaban:



$$A = a \wedge b$$

$$= (\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_3) \wedge (\mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3) = \mathrm{e}_{12} - \mathrm{e}_{13} - \mathrm{e}_{32}$$

$$A \vee B = A^* \cdot B$$

$$= \mathrm{e}_{123}(\mathrm{e}_{12} - \mathrm{e}_{13} - \mathrm{e}_{32}) \cdot \mathrm{e}_{12} = (-\mathrm{e}_3 - \mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_1) \cdot \mathrm{e}_{12}$$

Gunakan $a \cdot B = \frac{1}{2}(aB - Ba)$ maka

$$A \vee B = \frac{1}{2}((-\mathrm{e}_3 - \mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_1)\mathrm{e}_{12} - \mathrm{e}_{12}(-\mathrm{e}_3 - \mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_1))$$

$= \mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2$ (garis yang berwarna merah)

Latihan (Soal UAS 2019)

Diberikan tiga buah vektor sebagai berikut:

$a = 2e_1 + e_2 - e_3$

$b = e_1 - e_2 - e_3$

$c = 2e_1 + 2e_2 - e_3$

a) Jika B adalah multivektor, $B = ab$, perlihatkan bahwa $a = Bb^{-1}$

b) Tentukan perpotongan bidang yang dibentuk oleh vektor *b* dan *c* dengan bidang $(e_2 \wedge e_3)$

Jawaban:

(a) $B = ab = (2e_1 + e_2 - e_3)(e_1 - e_2 - e_3) = 2 - 3e_{12} - 2e_{23} + e_{31}$

$$b^{-1} = \frac{b}{\|b\|^2} = \frac{e_1 - e_2 - e_3}{(\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2})^2} = \frac{e_1 - e_2 - e_3}{3} = \frac{1}{3}(e_1 - e_2 - e_3)$$

sehingga

$$Bb^{-1} = (2 - 3e_{12} - 2e_{23} + e_{31})\,\frac{1}{3}(e_1 - e_2 - e_3)$$
$$= \frac{1}{3}((2e_1 - 2e_2 - 2e_3) + (3e_2 + 3e_1 + 3e_{123}) +$$
$$(-2e_{123} - 2e_3 + 2e_2) + (e_3 - 2e_{123} + e_1))$$
$$= \frac{1}{3}(6e_1 + 3e_2 - 3e_3) = 2e_1 + e_2 - e_3 = a \qquad \text{(terbukti)}$$

(b) Bidang yang dibentuk oleh *b* dan *c* misalkan adalah *A*

$$A = b \wedge c = (e_1 - e_2 - e_3) \wedge (2e_1 + 2e_2 - e_3)$$
$$= 4e_{12} + 3e_{23} - e_{31}$$

Maka, perpotongan *A* dengan $e_2 \wedge e_3$ dihitung dengan operasi *meet*:

$$A \vee (e_2 \wedge e_3) = A^* \cdot (e_2 \wedge e_3)$$
$$= e_{123}(4e_{12} + 3e_{23} - e_{31}) \cdot e_{23}$$ (Ket: $A^* = IA = e_{123}A$)
$$= 4e_{12312} + 3e_{12323} - e_{12331}) \cdot e_{23}$$
$$= (-4e_3 - 3e_1 + e_2) \cdot e_{23}$$ Gunakan $a \cdot B = \frac{1}{2}(aB - Ba)$
$$= \frac{1}{2}((-4e_3 - 3e_1 + e_2)e_{23} - e_{23}(-4e_3 - 3e_1 + e_2))$$
$$= \frac{1}{2}(-4e_{323} - 3e_{123} + e_{223} + 4e_{233} + 3e_{231} - e_{232})$$
$$= \frac{1}{2}(8e_2 + 2e_3)$$
$$= 4e_2 + e_3$$

Hubungan antara aljabar vektor dengan aljabar geometri

TABLE 8.9

Vector Algebra		Geometric Algebra	
vector	$v = a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j}$	vector	$v = a_1\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_2$
map	$a = a_1 \quad b = a_2$	map	$Z = \mathrm{e}_1 v$
complex number	$z = a + bi$	multivector	$Z = a_1 + a_2 I$
rotor	$z' = ze^{i\phi}$	rotor	$Z' = Ze^{I\phi}$
			$v' = ve^{I\phi}$
90° rotor	$v' = -a_2\mathrm{i} + a_1\mathrm{j}$	90° rotor	$v' = vI$

Hubungan antara aljabar geometri dengan aljabar quaternion

Perkalian *i*, *j*, dan *k* di dalam aljabar quaternion:

TABLE 8.10

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

$$ijk = -1$$

Misalkan didefinisikan tiga buah *bivector*:

$$B_1 = e_2 \wedge e_3$$

$$B_2 = e_3 \wedge e_1$$

$$B_3 = e_1 \wedge e_2$$

Perkalian ketiga buah *bivector* hasilnya:

TABLE 8.11

	B_1	B_2	B_3
B_1	-1	$-B_3$	B_2
B_2	B_3	-1	$-B_1$
B_3	$-B_2$	B_1	-1

$$B_1B_2B_3 = +1$$

Pada kedua tabel, hasil perkalian merupakan pencerminan terhadap diagonal utama namun dengan tanda berbeda

Hubungan antara *outer product* dan *cross product*

- Diberikan dua buah vektor di R^3: $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ dan $b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3$$

$$a \wedge b = (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_{23} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_{31} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_{12}.$$

- Kalikan e_{123} dengan $a \wedge b$:

$$e_{123}(a \wedge b) = (a_2b_3 - a_3b_2)e_{123}e_{23} + (a_3b_1 - a_1b_3)e_{123}e_{31} + (a_1b_2 - a_2b_1)e_{123}e_{12}$$

$$e_{123}(a \wedge b) = -(a_2b_3 - a_3b_2)e_1 - (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 - (a_1b_2 - a_2b_1)e_3.$$

- Kalikan kedua ruas dengan –1:

$$-e_{123}(a \wedge b) = (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3$$

- Maka dapat dinyatakan bahwa:

$$a \times b = -e_{123}(a \wedge b) = -I(a \wedge b)$$

- Dengan mengingat bahwa $a \times b$ menghasilkan vektor v yang ortogonal dengan a dan b, maka

$$v = -IB \qquad (v = a \times b \text{ dan } B = a \wedge b)$$

Contoh 6: Diberikan dua buah vektor di R^3 sebagai berikut:

$$a = -e_2 + e_3$$

$$b = e_1 - e_2.$$

Maka perkalian silang *a* dan *b* adalah

$$a \times b = c = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= e_1 + e_2 + e_3$$

Vektor *c* dapat dihitung pula sebagai berikut

$$\begin{aligned} B &= a \wedge b \\ &= (-e_2 + e_3) \wedge (e_1 - e_2) \\ &= -e_2 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_1 - e_3 \wedge e_2 \\ B &= e_{12} + e_{31} + e_{23}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} c &= -IB \\ &= -e_{123}(e_{12} + e_{31} + e_{23}) \\ &= e_3 + e_2 + e_1 \\ c &= e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

(hasilnya sama)

Latihan (UAS 2022)

(Kerjakan soal ini) Diberikan tiga buah vektor sebagai berikut:

$a = 2e1 + e2 - e3$

$b = e1 - e2 - e3$

$c = 2e1 + 2e2 - e3$

Tentukan perpotongan bidang yang dibentuk oleh vektor *a* dan *c* dengan bidang ($e2 \wedge e3$)

TAMAT